

# ALJABAR MAX PLUS: SUATU KAJIAN TEORI DAN APLIKASI FUNDAMENTALNYA

*by* Gregoria Ariyanti

---

**Submission date:** 01-Jun-2023 06:31PM (UTC+0700)

**Submission ID:** 2106675092

**File name:** No.14\_Aljabar\_max\_plus\_suatu\_kajian\_scan.pdf (2.41M)

**Word count:** 4328

**Character count:** 14649

## ALJABAR MAX PLUS : SUATU KAJIAN TEORI DAN APLIKASI FUNDAMENTALNYA

**Gregoria Ariyanti**

*Program Studi Pendidikan Matematika - FKIP  
Universitas Katolik Widya Mandala Madiun*

### ABSTRACT

<sup>3</sup> In max-plus algebra we work with the algebra structures consisting of the set  $\mathbb{R}_{\max} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$  together with operations  $a \otimes b = \max(a, b)$  and  $a \oplus b = a + b$ . The additive and multiplicative identities are taken to be  $\varepsilon = -\infty$  and  $e = 0$  respectively. Its operations are associative, commutative and distributive similar to those in conventional algebra.

In this article matrix over max-plus algebra (or in  $\mathbb{R}_{\max}$ ) is defined. This article emphasizes on max-plus linear algebra specifically. It is evident that some of the concepts of conventional linear algebra are also possessed by a max-plus version. The solvability of linear systems, such as  $A \otimes x = b$  is specifically elaborated in this article.

**Key words:** max-plus algebra, matrix over max-plus algebra, system of linear equations in max-plus algebra

### A. Pendahuluan

Struktur aljabar yang sudah dikenalkan dalam perkuliahan S1 Program Studi Matematika dan Pendidikan Matematika adalah struktur aljabar atas lapangan (*Field*), yaitu Grup (*Group*) dan Gelanggang (*Ring*). Dalam perkembangannya, struktur aljabar tidak hanya terbatas atas Grup dan Gelanggang saja, tetapi ada jenis lain, yaitu Aljabar Max-Plus (*Max-Plus Algebra*). Ada analogi antara teori dalam Aljabar Max-Plus dan teori struktur aljabar yang sudah dikenal (Grup dan Gelanggang). Namun, ada juga yang berbeda antara teori dalam Grup dan Gelanggang dengan teori dalam Aljabar Max-Plus. Karena Aljabar Max-Plus tidak sepenuhnya dikembangkan seperti dalam Grup dan Gelanggang, meskipun beberapa sifat dan konsep aljabar linier, seperti aturan *Cramer*, teorema *Cayley-Hamilton*, nilai eigen dan vektor eigen juga ada dalam Aljabar Max Plus (Schutter, 1997).

Adapun tujuan penulisan ini adalah untuk menginformasikan tentang struktur aljabar, yang disebut aljabar max-plus, sifat-sifat dasarnya, matriks atas aljabar linier max-plus serta contoh fundamentalnya pada sistem persamaan linier max-plus.

## B. Definisi dan Sifat-sifat Dasar Aljabar Max-Plus

Berikut dipaparkan definisi dan sifat-sifat dasar aljabar max-plus (Olsder, 2005).

### Definisi 1

Untuk  $\mathbb{R}$  himpunan semua bilangan riil, diberikan  $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$  dengan  $\varepsilon := -\infty$  dan  $e := 0$ .

Untuk setiap  $a, b \in \mathbb{R}_{max}$ , didefinisikan operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  sebagai berikut :

$$a \oplus b := \max(a, b)$$

$$a \otimes b := a + b$$

Berdasarkan definisi 1, karena  $\max(a, -\infty) = \max(-\infty, a) = a$  dan  $a + (-\infty) = -\infty + a = -\infty$ , untuk suatu  $a \in \mathbb{R}_{max}$ , maka  $a \oplus \varepsilon = a = \varepsilon \oplus a$  dan  $a \otimes e = a = e \otimes a$ .

Dan elemen nol untuk  $\oplus$  dalam  $\mathbb{R}_{max}$  dinyatakan dengan  $\varepsilon := -\infty$ .

Dari definisi 1 dapat diberikan contoh berikut :

$$5 \oplus 3 = \max(5, 3) = 5$$

$$5 \oplus \varepsilon = \max(5, -\infty) = 5$$

$$5 \otimes \varepsilon = 5 - \infty = -\infty = \varepsilon$$

$$e \oplus 3 = \max(0, 3) = 3$$

$$5 \otimes 3 = 5 + 3 = 8$$

Hasil pembentukan  $\mathbb{R}_{max}$  bersama dengan operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  disebut **Aljabar Max-Plus** (*Max-Plus Algebra*) dan dinotasikan dengan  $\mathfrak{R}_{max} = (\mathbb{R}_{max}, \oplus, \otimes, \varepsilon, e)$ .

Ada analogi antara operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  dalam aljabar max-plus dengan operasi  $+$  dan  $\times$  dalam aljabar linier (konvensional), yaitu operasi  $\otimes$  mempunyai prioritas (atau lebih kuat) daripada operasi  $\oplus$ .

Sebagai contoh,  $5 \otimes -9 \oplus 7 \otimes 1$  berarti  $(5 \otimes -9) \oplus (7 \otimes 1)$ .

Operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$  juga mempunyai sifat aljabar.

Sebagai contoh, untuk  $x, y, z \in \mathbb{R}_{max}$ , berlaku

$$\begin{aligned} x \otimes (y \oplus z) &= x + \max(y, z) \\ &= \max(x+y, x+z) \\ &= (x \otimes y) \oplus (x \otimes z), \end{aligned}$$

yang artinya distributif  $\otimes$  terhadap  $\oplus$ .

Adapun sifat aljabar yang lain dari aljabar max-plus adalah (Olsder, 2005):

1. asosiatif, yaitu  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max}, x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z$  dan  $\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max}, x \otimes (y \otimes z) = (x \otimes y) \otimes z$
2. komutatif, yaitu  $\forall x, y \in \mathbb{R}_{max}, x \oplus y = y \oplus x$  dan  $x \otimes y = y \otimes x$
3. distributif  $\otimes$  terhadap  $\oplus$ , yaitu

$$\forall x, y, z \in \mathbb{R}_{max}, x \otimes (y \oplus z) = (x \otimes y) \oplus (x \otimes z)$$

4. adanya elemen nol, yaitu  $\forall x \in \mathbb{R}_{max}, x \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus x = x$
5. adanya elemen satuan (*unit*), yaitu  $\forall x \in \mathbb{R}_{max}, x \otimes e = e \otimes x = x$
6. adanya sifat penyerapan oleh elemen nol  $\varepsilon$  terhadap  $\otimes$ , yaitu
 
$$\forall x \in \mathbb{R}_{max}, x \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes x = \varepsilon$$
7. sifat idempotent dari  $\oplus$ , yaitu  $\forall x \in \mathbb{R}_{max}, x \oplus x = x$

Untuk  $\mathbb{N}$  himpunan semua bilangan asli, didefinisikan untuk  $x \in \mathbb{R}_{max}$  sebagai berikut :

$$x^{\otimes n} := \underbrace{x \otimes x \otimes \dots \otimes x}_{n \text{ faktor}}$$

untuk semua  $n \in \mathbb{N}$  dengan  $n \neq 0$ , dan untuk  $n = 0$  didefinisikan  $x^{\otimes 0} := e (=0)$ .

Jika dianalogikan dengan aljabar linier, tampak bahwa untuk  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x^{\otimes n} := x + x + \dots + x = n \times x.$$

Sebagai contoh,

$$5^{\otimes 3} = 3 \times 5 = 5$$

$$8^{\otimes 2} = -2 \times 8 = -16 = 16^{\otimes -1}$$

Didefinisikan pula  $\varepsilon^{\otimes 0} := 0$  dan  $\varepsilon^{\otimes n} := \varepsilon$ , untuk  $n$ .

Dari definisi semiring berikut, tampak bahwa aljabar max-plus merupakan salah satu contoh struktur aljabar yang disebut semiring (Farlow, 2009).

### Definisi 2

Semiring adalah himpunan tak kosong  $R$  dengan dua operasi  $\oplus_R$  dan  $\otimes_R$  sedemikian sehingga :

- a.  $\oplus_R$  adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol  $\varepsilon_R$
- b.  $\otimes_R$  adalah asosiatif, distributif terhadap  $\oplus_R$ , dan mempunyai elemen satuan (*unit*)  $e_R$
- c.  $\varepsilon_R$  merupakan elemen penyerap terhadap  $\otimes_R$ .

Semiring demikian dinotasikan oleh  $\mathfrak{R} = (R, \otimes_R, \oplus_R, \varepsilon_R, e_R)$ .

Jika  $\otimes_R$  komutatif, maka  $\mathfrak{R}$  disebut komutatif dan jika  $\oplus_R$  idempotent, maka disebut idempotent. Suatu operasi  $\oplus_R$  dikatakan idempoten pada  $\mathfrak{R}$  jika untuk setiap  $x \in \mathfrak{R}$  berlaku  $x \oplus_R x = x$ .

Aljabar max-plus adalah contoh dari semiring komutatif dan idempoten. Karena untuk setiap  $a, b, c \in \mathbb{R}_{max}$ , berlaku:

- a.  $\oplus$  adalah asosiatif dan komutatif dengan elemen nol  $\varepsilon$ , yaitu :
 
$$(a \oplus b) \oplus c = \max(\max(a, b), c) = \max(a, b, c) = \max(a, \max(b, c)) = a \oplus (b \oplus c)$$

$$a \oplus b = \max(a, b) = \max(b, a) = b \oplus a$$

$$a \oplus \varepsilon = \max(a, -\infty) = a$$

- b.  $\otimes$  adalah asosiatif, distributif terhadap  $\oplus$  dan mempunyai elemen satuan (*unit*)  $e$ , yaitu :
- $$(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c)$$
- $$(a \oplus b) \otimes c = \max(a, b) + c = \max(a + c, b + c) = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c),$$
- $$a \otimes (b \oplus c) = a + \max(b, c) = \max(a + b, a + c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c).$$
- $$a \otimes e = a + 0 = a = 0 + a = e \otimes a$$
- c.  $\varepsilon$  merupakan elemen penyerap terhadap  $\otimes$ , yaitu :
- $$a \otimes \varepsilon = a + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + a = \varepsilon \otimes a.$$
- d. komutatif dan idempoten, yaitu
- $$a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a$$
- $$a \oplus a = \max(a, a) = a.$$

### C. Matriks atas Aljabar Max-Plus

Operasi  $\otimes$  dan  $\oplus$  dalam aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi matriks atas aljabar max-plus. (Olsder, 2005).

Himpunan  $m \times n$  matriks atas aljabar max plus dinotasikan dengan  $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ .

Untuk  $n \in \mathbb{N}$ , didefinisikan  $\bar{n} = \{1, 2, \dots, n\}$ .

Elemen dari matriks  $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$  dalam baris  $i$  dan kolom  $j$  dinotasikan dengan  $a_{ij}$ , untuk  $i \in \bar{m}$  dan  $j \in \bar{n}$ , atau elemen  $a_{ij}$  dapat ditulis sebagai  $[A]_{ij}$  dengan  $i \in \bar{m}$  dan  $j \in \bar{n}$ .

Jumlahan matriks  $A, B \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ , dinotasikan dengan  $A \oplus B$ , didefinisikan sebagai

$$[A \oplus B]_{ij} = a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a, b) \text{ untuk } i \in \bar{m} \text{ dan } j \in \bar{n}.$$

Sebagai contoh, diberikan

$$A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ dan } B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$$

maka  $[A \oplus B]_{11} = e \oplus -1 = \max(0, -1) = 0 = e$ .

Demikian juga,  $[A \oplus B]_{12} = \varepsilon \oplus 11 = \max(-\infty, 11) = 11$

$$[A \oplus B]_{21} = 3 \oplus 1 = \max(3, 1) = 3$$

$$[A \oplus B]_{22} = 2 \oplus \varepsilon = \max(2, -\infty) = 2$$

$$\text{Jadi, } A \oplus B = \begin{pmatrix} e & 11 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Untuk  $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times n}$  dan  $\alpha \in \mathbb{R}_{max}$ , perkalian skalar  $\alpha \otimes A$  didefinisikan oleh

$$[\alpha \otimes A]_{ij} = \alpha \otimes a_{ij}, i \in \bar{m} \text{ dan } j \in \bar{n}.$$

Sebagai contoh, diambil  $\alpha = 2$  dan  $A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ .

Diperoleh,  $[2 \otimes A]_{11} = 2 \otimes e = 2 + 0 = 2$ .

Demikian juga diperoleh,  $[2 \otimes A]_{12} = \varepsilon$ ,  $[2 \otimes A]_{21} = 5$  dan  $[2 \otimes A]_{22} = 4$ .

$$\text{Jadi, } 2 \otimes A = \begin{pmatrix} 2 & \varepsilon \\ 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Sedangkan, untuk  $A \in \mathbb{R}_{max}^{m \times l}$ , dan  $B \in \mathbb{R}_{max}^{l \times n}$  hasil kali matriks  $A \otimes B$  didefinisikan oleh

$$[A \otimes B]_{ik} = \bigoplus_{j=1}^l a_{ij} \otimes b_{jk} = \max_{j \in l} \{a_{ij} + b_{jk}\}.$$

Sebagai contoh, diambil  $A = \begin{pmatrix} e & \varepsilon \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$  dan  $B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 1 & \varepsilon \end{pmatrix}$ .

$$\begin{aligned} \text{Diperoleh, } [A \otimes B]_{11} &= e \otimes (-1) \oplus \varepsilon \otimes 1 = \max(0-1, -\infty+1) = -1 \\ [A \otimes B]_{12} &= e \otimes 11 \oplus \varepsilon \otimes \varepsilon = \max(0+11, -\infty - \infty) = 11 \\ [A \otimes B]_{21} &= 3 \otimes (-1) \oplus 2 \otimes 1 = \max(3-1, 2+1) = 3 \\ [A \otimes B]_{22} &= 3 \otimes 11 \oplus 2 \otimes \varepsilon = \max(3+11, 2 - \infty) = 14 \end{aligned}$$

$$\text{Jadi, } A \otimes B = \begin{pmatrix} -1 & 11 \\ 3 & 14 \end{pmatrix}$$

Matriks identitas max-plus  $n \times n$ ,  $E_n$ , didefinisikan sebagai

$$[E_n]_{ij} = \begin{cases} e, & \text{jika } i = j \\ \varepsilon, & \text{jika } i \neq j \end{cases}$$

Operasi-operasi matriks atas aljabar max-plus mempunyai sifat sebagai berikut (Rudhito, 2003):

1.  $(A \oplus B) \oplus C = A \oplus (B \oplus C)$
2.  $A \oplus B = B \oplus A$
3.  $(A \otimes B) \otimes C = A \otimes (B \otimes C)$
4.  $A \otimes (B \oplus C) = (A \otimes B) \oplus (A \otimes C)$
5.  $(A \oplus B) \otimes C = (A \otimes C) \oplus (B \otimes C)$
6.  $\alpha \otimes A = A \otimes \alpha$
7.  $\alpha \otimes (\beta \otimes A) = (\alpha \otimes \beta) \otimes A$
8.  $\alpha \otimes (A \otimes B) = (\alpha \otimes A) \otimes B = A \otimes (\alpha \otimes B)$
9.  $(\alpha \oplus \beta) \otimes A = (\alpha \otimes A) \oplus (\beta \otimes A)$
10.  $\alpha \otimes (A \oplus B) = (\alpha \otimes A) \oplus (\alpha \otimes B)$
11.  $A \oplus A = A$ .

#### D. Contoh Fundamental Aljabar Max-Plus pada Sistem Persamaan Linier Max-Plus

Dalam bagian ini, akan dipaparkan sistem persamaan linier untuk aljabar max-plus. Meskipun ada beberapa kesamaan antara penyelesaian sistem persamaan linier aljabar max-plus dan aljabar konvensional, tetapi tetap ada perbedaan.

Diberikan persamaan matriks  $A \otimes x = b$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 & b_2 \\ & & \ddots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & x_n & b_m \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right| = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{matrix} (a_{11} & x_1) & (a_{12} & x_2) & \dots & (a_{1n} & x_n) = b_1 \\ (a_{21} & x_1) & (a_{22} & x_2) & \dots & (a_{2n} & x_n) = b_2 \\ (a_{m1} & x_1) & (a_{m2} & x_2) & \dots & (a_{mn} & x_n) = b_m \end{matrix}$$

Selanjutnya, diperoleh penyelesaian sistem berikut :

$$\begin{aligned} \max \{(a_{11} + x_1), (a_{12} + x_2), \dots, (a_{1n} + x_n)\} &= b_1 \\ \max \{(a_{21} + x_1), (a_{22} + x_2), \dots, (a_{2n} + x_n)\} &= b_2 \\ \dots & \\ \max \{(a_{m1} + x_1), (a_{m2} + x_2), \dots, (a_{mn} + x_n)\} &= b_m \end{aligned}$$

Akan ditinjau kasus bahwa penyelesaiannya ada dan beberapa elemen dari  $b$  adalah  $-\infty$  (Andersen, 2002). Tanpa kehilangan keumuman, dapat diurutkan persamaan sehingga elemen-elemen berhingga dari  $b$  berbentuk :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & x_1 & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & x_2 & b_k \\ & & \ddots & & & -\infty \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & x_n & -\infty \end{pmatrix} \left| \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right| = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_k \\ -\infty \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Akibatnya,

$$\begin{cases} \max \{(a_{11} + x_1), (a_{12} + x_2), \dots, (a_{1n} + x_n)\} = b_1 \\ \max \{(a_{k1} + x_1), (a_{k2} + x_2), \dots, (a_{kn} + x_n)\} = b_k \\ \max \{(a_{k+1,1} + x_1), (a_{k+1,2} + x_2), \dots, (a_{k+1,n} + x_n)\} = -\infty \\ \dots \\ \max \{(a_{n1} + x_1), (a_{n2} + x_2), \dots, (a_{nn} + x_n)\} = -\infty \end{cases}$$

Matriks tersebut dapat dipartisi sehingga terdapat  $j$  dengan  $a_{k+1,j}, \dots, a_{m,j} = -\infty$  sebagai berikut :

$$\begin{pmatrix} & A_1 & & A_2 \\ \dots & & & \\ -\infty & \dots & -\infty & \\ & & \ddots & \\ -\infty & \dots & -\infty & A_3 \end{pmatrix} \left( \begin{matrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \\ x_{l+1} \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \right) = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \\ -\infty \\ \vdots \\ -\infty \end{pmatrix}$$

Diberikan dimensi matriks  $A_1$  yaitu  $k \times l$ .

Diberikan  $b' = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$  dan  $x' = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_l \end{bmatrix}$ .

Jika  $A \otimes x = b$  mempunyai penyelesaian, maka  $x_{l+1} = \dots = x_n = -\infty$ , dan  $A_1 \otimes x' = b'$ . Akibatnya,  $A \otimes x = b$  mempunyai penyelesaian jika dan hanya jika  $x'$  adalah penyelesaian pada  $A_1 \otimes x' = b'$  dan penyelesaian pada  $A \otimes x = b$  adalah

$$x = \begin{bmatrix} x' \\ -\infty \end{bmatrix}.$$

Selanjutnya, penyelesaian dari sistem dengan elemen tak hingga dalam  $b$  dapat direduksi pada sistem dengan elemen berhingga dalam  $b'$ . Oleh karena itu, dapat dibatasi pada  $A \otimes x = b$  dengan semua elemen dari  $b$  adalah berhingga.

Jika terdapat penyelesaian pada sistem persamaan max-plus, maka  $a_{ij} + x_j \leq b_i$  untuk semua  $i \in \{1, \dots, m\}$  dan  $j \in \{1, \dots, n\}$ .

Untuk mencari penyelesaian dari sistem, pertama perhatikan tiap komponen dari  $x$  secara terpisah.

Sebagai contoh,  $x_1$ .

Jika ada penyelesaian dari sistem, maka  $a_{i1} + x_1 \leq b_i$  untuk  $i = 1, 2, \dots, m$ .

Maka  $x_1 \leq b_i - a_{i1}$  untuk setiap  $i$ , dan pada sistem berikut untuk batas atas  $x_1$ :

$$x_1 \leq b_1 - a_{11}$$

$$x_1 \leq b_2 - a_{21}$$

$$x_1 \leq b_m - a_{m1}$$

Jika sistem pertidaksamaan ini mempunyai penyelesaian, maka akan dipenuhi:

$$x_1 \leq \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \dots, (b_m - a_{m1}) \}.$$

Dengan cara yang sama, dapat diperoleh penyelesaian yang mungkin untuk  $x_2, \dots, x_n$ , dan memberikan sistem pertidaksamaan berikut pada tiap elemen  $x_j$ :

$$x_1 \leq \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \dots, (b_m - a_{m1}) \}.$$

$$x_2 \leq \min \{ (b_1 - a_{12}), (b_2 - a_{22}), \dots, (b_m - a_{m2}) \}$$

$$x_n \leq \min \{ (b_1 - a_{1n}), (b_2 - a_{2n}), \dots, (b_m - a_{mn}) \}$$

Dari pertidaksamaan di atas, dapat dimisalkan  $x'$  penyelesaian pada  $A \otimes x = b$ , dengan

$$x' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix} \text{ di mana } \begin{cases} x'_1 = \min \{ (b_1 - a_{11}), (b_2 - a_{21}), \dots, (b_m - a_{m1}) \} \\ x'_2 = \min \{ (b_1 - a_{12}), (b_2 - a_{22}), \dots, (b_m - a_{m2}) \} \\ \vdots \\ x'_n = \min \{ (b_1 - a_{1n}), (b_2 - a_{2n}), \dots, (b_m - a_{mn}) \} \end{cases}$$

Didefinisikan matriks  $D_{A,b}$  (*the discrepancy matrix*) sebagai berikut :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} b_1 - a_{11} & b_1 - a_{12} & \dots & b_1 - a_{1n} \\ b_2 - a_{21} & b_2 - a_{22} & \dots & b_2 - a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_m - a_{m1} & b_m - a_{m2} & \dots & b_m - a_{mn} \end{pmatrix}$$

Matriks  $D_{A,b}$  adalah suatu matriks sederhana dengan semua batas atas dari  $x_i$  dan setiap  $x_i$  dapat ditentukan dengan mengambil minimum dari kolom ke  $i$  dari  $D_{A,b}$ .

**Contoh 1 :**

Menentukan penyelesaian  $A \otimes x = b$

dengan  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$  dan  $b = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix}$ .

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6-2 & 6-3 & 6-1 & 4 & 3 & 5 \\ 10-0 & 10-4 & 10-6 & 10 & 6 & 4 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) & 2 & 4 & 7 \\ 11-9 & 11-6 & 11-3 & 2 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

Elemen untuk penyelesaian dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari  $D_{A,b}$  yaitu :

$$\begin{aligned} x'_1 &= \min \{ 4, 10, 2, 2 \} = 2 \\ x'_2 &= \min \{ 3, 6, 4, 5 \} = 3 \\ x'_3 &= \min \{ 5, 4, 7, 8 \} = 4 \end{aligned}$$

maka  $x' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  adalah penyelesaian dari  $A \otimes x = b$ .

Dapat dibuktikan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (2 \ 2) & (3 \ 3) & (1 \ 4) \\ (0 \ 2) & (4 \ 3) & (6 \ 4) \\ (3 \ 2) & (1 \ 3) & (-2 \ 4) \\ (9 \ 2) & (6 \ 3) & (3 \ 4) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{maks}\{(2+2), (3+3), (1+4)\} \\ \text{maks}\{(0+2), (4+3), (6+4)\} \\ \text{maks}\{(3+2), (1+3), (-2+4)\} \\ \text{maks}\{(9+2), (6+3), (3+4)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 10 \\ 5 \\ 11 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut mempunyai satu penyelesaian.

**Contoh 2 :**Menentukan penyelesaian  $A \otimes x = b$ 

$$\text{dengan } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ dan } b = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6-2 & 6-3 & 6-1 & 4 & 3 & 5 \\ 12-0 & 12-4 & 12-6 & 12 & 8 & 6 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) & 2 & 4 & 7 \\ 9-9 & 9-6 & 9-3 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Elemen yang akan menjadi penyelesaian dari sistem tersebut dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari  $D_{A,b}$  yaitu :

$$x'_1 = \min \{4, 12, 2, 0\} = 0$$

$$x'_2 = \min \{3, 8, 4, 3\} = 3$$

$$x'_3 = \min \{5, 6, 7, 6\} = 5$$

tetapi jika  $x' = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$  disubstitusi pada  $A \otimes x = b$ , diperoleh bahwa  $x'$  bukan

penyelesaiannya. Hal itu dapat ditunjukkan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2 & 0) & (3 & 3) & (1 & 5) \\ (0 & 0) & (4 & 3) & (6 & 5) \\ (3 & 0) & (1 & 3) & (-2 & 5) \\ (9 & 0) & (6 & 3) & (3 & 5) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \text{maks}\{(2+0), (3+3), (1+5)\} \\ \text{maks}\{(0+0), (4+3), (6+5)\} \\ \text{maks}\{(3+0), (1+3), (-2+5)\} \\ \text{maks}\{(9+0), (6+3), (3+5)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 11 & 4 \\ 9 & 9 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut tidak mempunyai penyelesaian.

**Contoh 3 :**Menentukan penyelesaian  $A \otimes x = b$ 

$$\text{dengan } A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ dan } b = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

diperoleh matriks :

$$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 8-2 & 8-3 & 8-1 & 6 & 5 & 7 \\ 13-0 & 13-4 & 13-6 & 13 & 9 & 7 \\ 5-3 & 5-1 & 5-(-2) & 2 & 4 & 7 \\ 10-9 & 10-6 & 10-3 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Elemen untuk penyelesaian dapat ditentukan dengan mengambil nilai minimum tiap kolom dari  $D_{A,b}$  yaitu :

$$\begin{aligned}x'_1 &= \min \{ 6, 13, 2, 1 \} = 1 \\x'_2 &= \min \{ 5, 9, 4, 4 \} = 4 \\x'_3 &= \min \{ 7, 7, 7, 7 \} = 7\end{aligned}$$

Jika  $x' = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}$  disubstitusi pada  $A \otimes x = b$ , diperoleh bahwa  $x'$  merupakan

penyelesaiannya. Hal itu dapat ditunjukkan dengan perhitungan berikut :

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 6 \\ 3 & 1 & -2 \\ 9 & 6 & 3 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} (2 & 1) & (3 & 4) & (1 & 7) \\ (0 & 1) & (4 & 4) & (6 & 7) \\ (3 & 1) & (1 & 4) & (-2 & 7) \\ (9 & 1) & (6 & 4) & (3 & 7) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{maks}\{(2+1), (3+4), (1+7)\} \\ \text{maks}\{(0+1), (4+4), (6+7)\} \\ \text{maks}\{(3+1), (1+4), (-2+7)\} \\ \text{maks}\{(9+1), (6+4), (3+7)\} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 13 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Jadi, sistem persamaan linier tersebut mempunyai penyelesaian.

Tetapi, ada penyelesaian lain yang juga memenuhi sistem tersebut. Yaitu, untuk setiap  $x$  yang memenuhi bentuk  $x = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 7 \end{pmatrix}$  dengan  $a \leq 1$  dan  $b \leq 4$ .

Jika matriks  $D_{A,b}$  direduksi menjadi matriks  $R_{A,b}$  dengan

$$R_{A,b} = (r_{ij}) \text{ dengan } r_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{jika } d_{ij} = \text{minimum dari kolom } j \\ 0 & \text{untuk yang lain} \end{cases}$$

maka dari tiga contoh terakhir dapat diperoleh matriks sebagai berikut :

Contoh 1 : Satu penyelesaian	Contoh 2 : Tidak mempunyai penyelesaian	Contoh 3 : Lebih dari satu penyelesaian
$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{pmatrix}$	$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 12 & 8 & 6 \\ 2 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$	$D_{A,b} = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 13 & 9 & 7 \\ 2 & 4 & 7 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$
$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$R_{A,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Dari matriks di atas tampak bahwa elemen minimum pada masing-masing matriks merupakan penyelesaian dari masing-masing sistem persamaan linier.

Tampak pula, bahwa sistem mempunyai penyelesaian jika dalam tiap baris minimal terdapat satu elemen bernilai 1.

**Teorema :**

Diberikan  $A \otimes x = b$  sistem persamaan linier dalam aljabar max plus dengan  $A$  matriks  $m \times n$  dan  $b$  matriks  $n \times 1$  dengan semua elemen berhingga.

- Jika terdapat baris nol dalam matriks  $D_{A,b}$  yang direduksi, maka sistem tidak mempunyai penyelesaian.
- Jika terdapat paling sedikit satu elemen bernilai 1 pada tiap baris dari matriks  $D_{A,b}$  yang direduksi menjadi  $R_{A,b}$ , maka  $x'$  merupakan penyelesaiannya.

**Bukti :**

- Tanpa kehilangan keumumannya, dinotasikan baris nol pada  $R_{A,b}$  dengan baris  $k$ .

Dengan kontradiksi bahwa  $\tilde{x}$  adalah penyelesaian dari  $A \otimes x = b$  maka

$$\tilde{x}_j \leq \min_l (b_l - a_{lj}) < b_k - a_{kj}.$$

Maka  $\tilde{x}_j + a_{kj} < b_k$  untuk setiap  $j$ .

Oleh karena itu,  $\tilde{x}$  tidak memenuhi persamaan ke  $k$  dan bukan penyelesaian dari  $A \otimes x = b$ .

- Hal di atas juga dapat dibuktikan dengan kontraposisi.

Misalkan  $x'$  bukan penyelesaian pada sistem tersebut, dengan definisi,  $x'_j < b_k - a_{kj}$  untuk semua  $j, k$ .

Oleh karena itu,  $\max_j (a_{kj} + x'_j) < b_k$  dan jika  $x'$  bukan penyelesaian maka terdapat  $k$  dengan  $\max_j (a_{kj} + x'_j) < b_k$ . Hal ini ekuivalen dengan  $x'_j < b_k - a_{kj}$  untuk semua  $j$ . Oleh karena  $x'_j = \min_l (b_l - a_{lj})$  untuk suatu  $l$ , maka tidak ada elemen dalam baris  $k$  dari  $R_{A,b}$  yang bernilai sama dengan 1.

**E. Penutup**

Aljabar max-plus adalah struktur aljabar yang terdiri dari  $\mathbb{R}_{max} = \mathbb{R} \cup \{\varepsilon\}$  dengan  $\varepsilon := -\infty$ , dilengkapi operasi  $\oplus$  dan  $\otimes$ , didefinisikan untuk  $a, b \in \mathbb{R}_{max}$  sebagai berikut :

$$a \oplus b := \max(a, b)$$

$$a \otimes b := a + b$$

Operasi  $\otimes$  dan  $\oplus$  dalam aljabar max-plus dapat diperluas untuk operasi matriks atas aljabar max-plus, dengan himpunan  $m \times n$  matriks atas aljabar max plus dinotasikan dengan  $\mathbb{R}_{max}^{m \times n}$ .

Dalam aljabar max plus, sistem persamaan linier  $m \times n$  dapat mempunyai satu penyelesaian, tidak mempunyai penyelesaian, dan mempunyai penyelesaian lebih dari 1, yang juga berlaku pada aljabar konvensional.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Andersen, Maria H. 2002. *Max-Plus Algebra : Properties and Applications*.  
<http://www.teachingcollegemath.com/files/>. Diakses 5 Februari 2011.
- Farlow, Kasie G. 2009. *Max-Plus Algebra*. Thesis submitted to the Faculty of the Virginia Polytechnic Institute and State University.
- Olsder, G.J., and Woude, J. 2005. *Max Plus at Work*. United State : Princeton University Press.
- Rudhito, Andy. 2003. *Sistem Linear Max-Plus Waktu-Invariant*. Tesis: Program Pascasarjana Universitas Gadjah Mada. Yogyakarta.
- Schutter, B. 1997. "The Singular Value Decomposition in The Extended Max Algebra," *Linear Algebra and Its Applications*, vol. 250, pp.143-176, Jan 1997.  
<http://pub.deschutter.info/abs/94.27.html> diakses 19 Januari 2011.

# ALJABAR MAX PLUS: SUATU KAJIAN TEORI DAN APLIKASI FUNDAMENTALNYA

## ORIGINALITY REPORT

5%

SIMILARITY INDEX

5%

INTERNET SOURCES

1%

PUBLICATIONS

0%

STUDENT PAPERS

## PRIMARY SOURCES

1	<a href="http://repository.unej.ac.id">repository.unej.ac.id</a> Internet Source	3%
2	<a href="http://www.laernu.com">www.laernu.com</a> Internet Source	1%
3	<a href="http://dspace.knust.edu.gh">dspace.knust.edu.gh</a> Internet Source	1%
4	<a href="http://repository.maranatha.edu">repository.maranatha.edu</a> Internet Source	1%

Exclude quotes  On

Exclude bibliography  On

Exclude matches  < 1%